שיעור 11 – האופרטור הצמוד

# עובדה

1. בהינתן אופרטור ליניארי קיים אופרטור יחיד כך  
   ש לכל .
2. אם B בסיס אורתונורמלי בV אזי

## דוגמה

# תכונות

# תרגיל

אופרטור לינארי. תת-מרחב T-אינווריאנטי. הוכח כי הוא -אינווריאנטי.

## פתרון

יהי . צריך להראות .  
יהי , צריך להראות ש  
נחשב   
 – v נמצא ב. w נמצא בW, וW הוא T-אינווריאנטי, ולכן נמצא בW.  
ולכן ולכן

# הגדרות

1. אופרטור המקיים נקרא נורמלי.
2. אם אזי T אוניטרי.
3. T נקרא הרמיטי(או צמוד לעצמו) אם .
4. T נקרא אנטי-הרמיטי(אנטי-צמוד לעצמו) אם

# תרגיל

יהי V ממ"פ מעל . הוכח כי אם לכל אזי T נורמלי.

## הוכחה

*כעת יש משפט שאומר כי אם לכל כאשר V ממ"פ מעל ו אופרטור אזי .*

# תרגיל

אופרטור, V ממ"פ מעל .

1. הוכח כי לT הצגה יחידה כאשר A וB אופרטורים ~~צמודים לעצמם~~ הרמיטים

## פתרון

נניח שקיימת הצגה כשA,B הרמיטיים.  
תרגיל בית: לבדוק כי A וB הרמיטים.

# הערה

התכונות הנ"ל(אוניטריות, נורמליות, הרמיטיות ואנטי הרמיטיות) מתקיימות עבור T אם ורק אם הן מתקיימות ל כאשר B אורטונורמלי.

# הגדרה מקדימה

1. כשV ממ"פ מעל אזי מרחק בין הוא .
2. זווית בין v לu היא המספר הממשי היחיד המקיים

# הגדרות

1. אופרטור נקרא איזומטריה אם לכל ("שומר מרחק").
2. T שומרת זווית אם הזווית בין u לv שווה לזווית בין Tu לTv לכל .

## תרגיל

נגדיר T שומרת נורמה אם לכל . הוכח שT שומרת נורמה אם ורק אם T איזומטריה.

## פתרון

(⇦) נניח T איזומטריה. אזי לכל . בפרט זה נכון עבור , ואז

(⇨) נניח שT שומרת נורמה. יהיו . נסמן . עכשיו משום שT שומרת נורמה  
 ⇦ T איזומטריה.

# הגדרה

T שומרת מכפלה מנימית אם לכל .

# תרגיל

הוכח או הפרך

1. T שומרת זווית ⬄ T שומרת מכפלה פנימית

## פתרון

לא. ניקח למשל , עם מכפלה פנימית סטנדרטית.. T מעריך את הווקטורים פי 2, ולכן הוא שומר זווית, אבל

1. אם T איזומטריה אזי  
   T שומרת זווית ⬄ T שומרת מכפלה פנימית

## פתרון

זווית בין ל היא

(⇦) אם T שומרת מכפלה פנימית אזי ⇦

(⇨) אם T שומרת זווית אזי נכפיל א את שני האגפים ונקבל